

Определение и основные свойства функций $ur_m(x)$

Обобщением функции $ur(x)$ является функция $ur_m(x)$. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$y'(x) = a \sum_{k=1}^m (y(2mx + 2m - 2k + 1) - y(2mx - 2k + 1)). \quad (1)$$

где $m = 1, 2, 3, 4, \dots$

Теорема 1. При каждом m уравнение (1) имеет единственное финитное, с носителем $[-1, 1]$ бесконечно дифференцируемое решение $y_m(x)$, удовлетворяющее условию нормировки с $a = 2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m(x) dx = 1. \quad (2)$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения (1) в пространстве L_1 , где L_1 – пространство суммируемых на всей оси функций. Применив к обеим частям уравнения (1) преобразование Фурье, получим

$$itF(t) = \frac{a}{2m} \sum_{k=1}^m \left(\exp\left(it \frac{2m - 2k + 1}{2m}\right) - \exp\left(it \frac{-2k + 1}{2m}\right) \right) F\left(\frac{t}{2m}\right), \quad (3)$$

где $F(t)$ - преобразование Фурье искомой функции $y_m(x)$.

Упростим выражение (3).

$$itF(t) = \frac{a}{2m} (e^{it} - 1) \left(\sum_{k=1}^m \exp \left(it \frac{-2k+1}{2m} \right) \right) F \left(\frac{t}{2m} \right), \quad (4)$$

Пользуясь свойствами геометрической прогрессии, вычислим сумму в (4).

$$\sum_{k=1}^m \exp \left(it \frac{-2k+1}{2m} \right) = e^{-\frac{it}{2m}} \left(1 + e^{-\frac{it}{m}} + \dots + e^{-\frac{(m-1)it}{m}} \right) = e^{-\frac{it}{2m}} \frac{e^{-it} - 1}{e^{-\frac{it}{m}} - 1}.$$

Преобразуем полученное выражение при помощи формулы Эйлера

$$\sum_{k=1}^m \exp \left(it \frac{-2k+1}{2m} \right) = e^{-\frac{it}{2m}} \frac{e^{-it} - 1}{e^{-\frac{it}{m}} - 1} = e^{-\frac{it}{2m}} \frac{e^{-\frac{it}{2}} (e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}})}{e^{-\frac{it}{2m}} (e^{-\frac{it}{2m}} - e^{\frac{it}{2m}})} = e^{-\frac{it}{2}} \frac{\sin(t/2)}{\sin(t/2m)}. \quad (5)$$

Подставляя выражение для суммы (5) в (4), имеем

$$itF(t) = \frac{a}{2m} (e^{it} - 1) e^{-\frac{it}{2}} \frac{\sin(t/2)}{\sin(t/2m)} F \left(\frac{t}{2m} \right).$$

Тогда, согласно формуле Эйлера, получим

$$F(t) = \frac{a \cdot \sin^2(t/2)}{mt \sin(t/2m)} F\left(\frac{t}{2m}\right) = \frac{a \cdot \text{sinc}^2(t/2)}{2 \text{sinc}(t/2m)} F\left(\frac{t}{2m}\right), \quad (6)$$

где $\text{sinc}(t) = \sin(t)/t$.

Так как $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)dx$, то, согласно условию нормировки (2), $F(0) = 1 \neq 0$.

Известно, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции есть непрерывная функция. Поэтому, переходя к пределу в равенстве (6) при $t \rightarrow 0$, получим, что $a = 2$. Из (6), учитывая, что $a = 2$, получим

$$F(t) = \frac{2 \sin^2(t/2)}{mt \sin(t/2m)} F\left(\frac{t}{2m}\right). \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$F\left(\frac{t}{2m}\right) = \frac{2 \sin^2\left(\frac{t}{2 \cdot 2m}\right)}{m \frac{t}{2m} \sin\left(\frac{t}{(2m)^2}\right)} F\left(\frac{t}{(2m)^2}\right). \quad (8)$$

Продолжая неограниченно этот процесс, получим

$$F(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{mt}{(2m)^k}\right)}{\frac{mt}{(2m)^k} m \sin\left(\frac{t}{(2m)^k}\right)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{mt}{(2m)^k}\right)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{(2m)^k}\right)}. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что бесконечное произведение (9) сходится. Тогда, по теореме Пэли Винера, функция $y(x)$, определяемая равенством

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F(t) dt, \quad (10)$$

и обращается в ноль вне отрезка $[-1, 1]$. Непосредственно проверяется, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Этим доказательство теоремы 1 завершается.

В дальнейшем при всяком $m = 1, 2, 3, 4 \dots$ будем обозначать соответствующее решение уравнения (1) через $u_m(x)$, а преобразование Фурье этого решения – через $F_m(t)$. Из представления (9) следует, что функция $F_m(t)$ убывает на действительной оси быстрее любой степенной функции вида t^{-n} , а это означает, что функция $u_m(x)$ бесконечно дифференцируема.

Известно, что преобразование Фурье свертки интегрируемых функций равно произведению преобразований Фурье этих функций. Так как преобразование Фурье функций $u_{r_m}(x)$ представляется бесконечным произведением, то сама функция $u_{r_m}(x)$ есть бесконечная свертка некоторых функций. Представляет интерес вопрос от том, как устроены эти свертываемые функции. При рассмотрении этого вопроса удобнее иметь дело не с представлением (9), а вернуться к равенству (3) с учетом того, что $a = 2$. Имеем

$$F_m(t) = \frac{1}{imt} \sum_{k=1}^m \left(\exp\left(it \frac{2m-2k+1}{2m}\right) - \exp\left(it \frac{-2k+1}{2m}\right) \right) F_m\left(\frac{t}{2m}\right), \quad (11)$$

Записывая функцию $F_m\left(\frac{t}{2m}\right)$ по формуле (11) и продолжая, как прежде, этот процесс, получим

$$F_m(t) = \prod_{s=1}^{\infty} 2 \frac{(2m)^{s-2}}{it} \sum_{k=1}^m \left(\exp\left(it \frac{2m-2k+1}{(2m)^s}\right) - \exp\left(it \frac{-2k+1}{(2m)^s}\right) \right). \quad (12)$$

Свертываемые функции, соответствующие сомножителю с номером s в представлении (12), будем обозначать через $\varphi_{s,m}(x)$, ($s = 1, 2, 3, \dots$). Из представления (12), а также из элементарных свойств преобразования Фурье вытекает, что на отрезке $[-1, 0]$

$$\varphi_{s,m}(x) = \frac{k}{m}, \quad \left(x \in \left[-1 + \frac{2k-1}{2m}, -1 + \frac{2k+1}{2m} \right] \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (13)$$

$$\text{и } \varphi_{1,m}(x) = 1, \quad \left(x \in \left[-\frac{1}{2m}, 0 \right] \right).$$

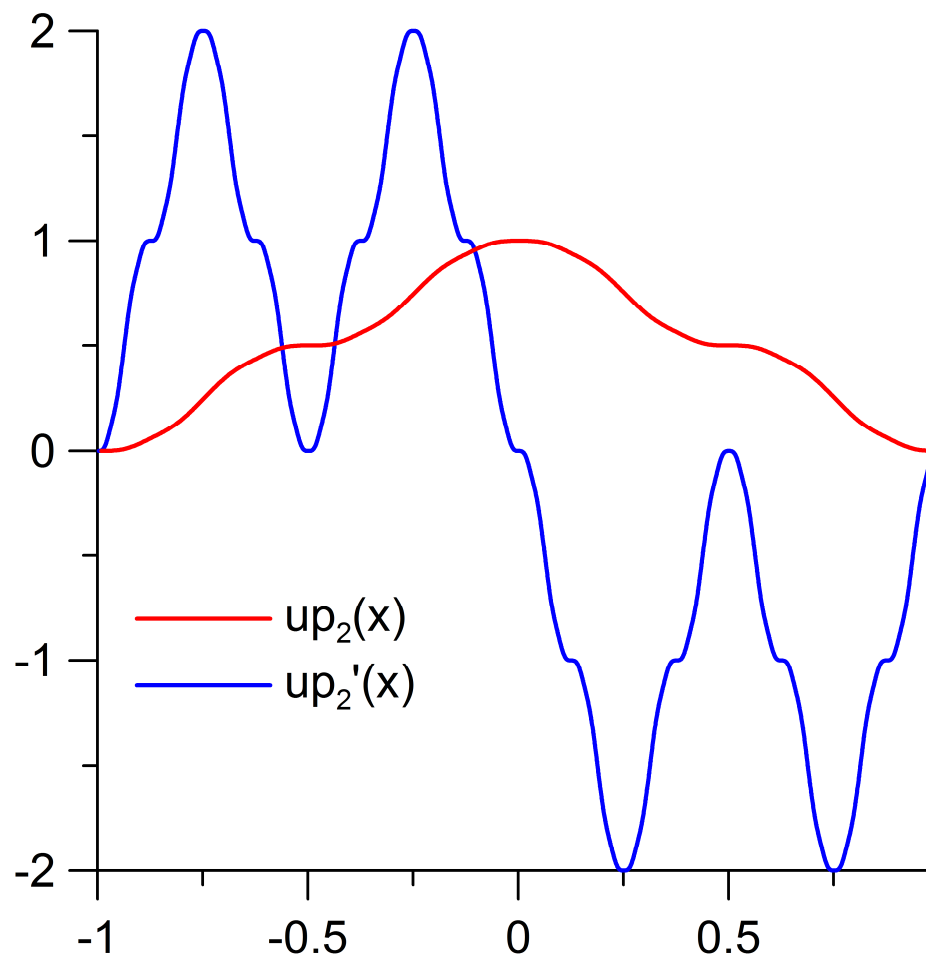
Кроме того, ясно, что на отрезок $[0, 1]$ функция $\varphi_{1,m}(x)$ продолжается четным образом и что $\varphi_{1,m}(x)$ обращается в ноль вне отрезка $[-1, 1]$. Далее, из представления (13), видно, что

$$\varphi_{s+1,m}(x) = 2m\varphi_{s,m}(2mx), \quad (s = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

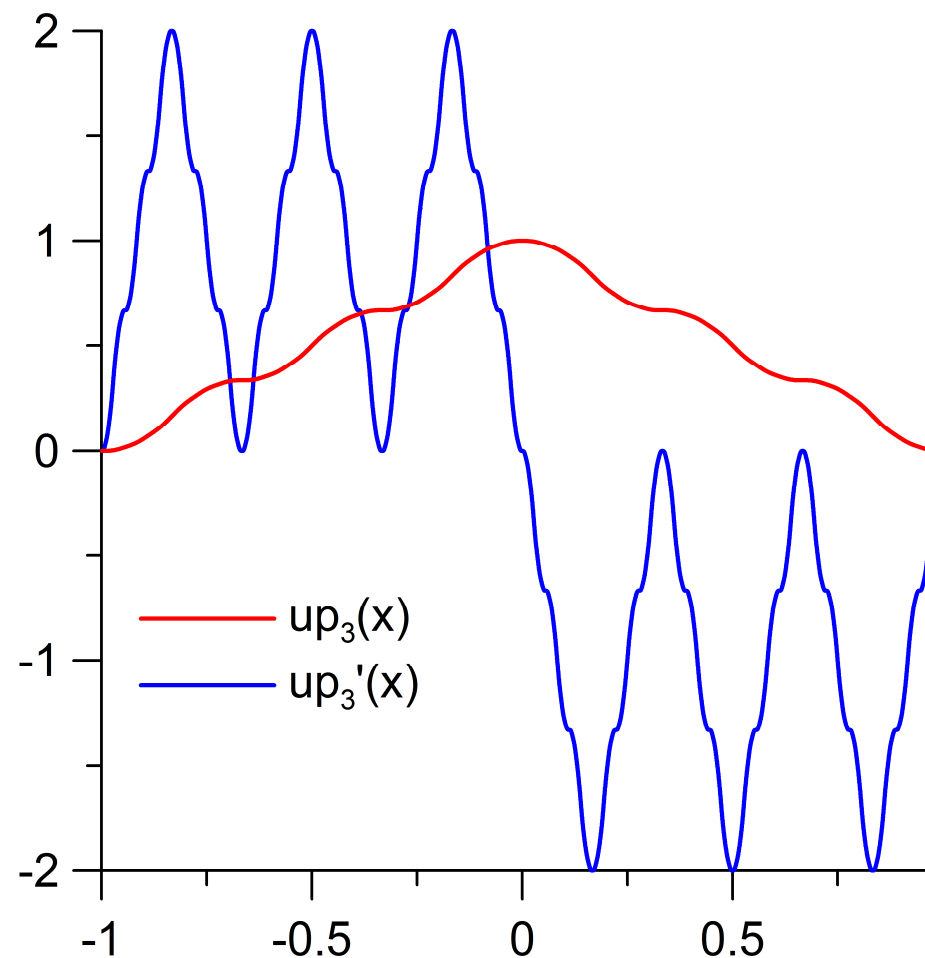
Непосредственно проверяется, что $\int_{-1}^1 \varphi_{1,m}(x) dx = 1$, а из равенства (14) следует, что и $\int_{-1}^1 \varphi_{s,m}(x) dx = 1$, $(s = 1, 2, 3, \dots)$. Важно подчеркнуть, что все $\varphi_{s,m}$ неотрицательны и, поскольку свертка неотрицательных функций неотрицательна, заключаем, что $\text{up}_m(x)$ также неотрицательна.

Атомарные функции $up_m(x)$

$$y'(x) = 2 \sum_{k=1}^m (y(2mx + 2m - 2k + 1) - y(2mx - 2k + 1))$$



$up_2(x)$ и $up_2'(x)$



$up_3(x)$ и $up_3'(x)$

Теперь перечислим и докажем основные свойства функций $up_m(x)$

1. $\text{supp } up_m = [-1, 1]$;

2. $\int_{-1}^1 up_m(x) dx = 1$;

3. $up_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{mt}{(2m)^k}\right)}{\frac{mt}{(2m)^k} m \sin\left(\frac{t}{(2m)^k}\right)} dt$;

4. $up_m \in C^\infty$;

5. $up_m(0) = 1$;

6. $up_m(-x) = up_m(x)$;

7. $up_m(x)$ монотонно возрастает при $x \in [-1, 0]$ и монотонно убывает при $x \in [0, 1]$;

8. Целочисленные сдвиги $up_m(x)$ дают разбиение единицы,

т.е. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} up_m(x - k) \equiv 1$;

Обозначим для $f(x) \in C^\infty$ множество всех $x \in [-1, 1]$ таких, что $f^{(l)}(x) = 0$ через $N_l(f)$. Положим также для краткости $N_l(\text{up}_m) = N_{l,m}$;

$$9. N_{l,m} = \left\{ \frac{2s}{(2m)^l} \right\}_{s=1}^{\infty}, \left(s \in \mathbb{Z}, |s| \leq \frac{(2m)^l}{2} \right), N_{0,m} = \{-1, 1\};$$

10. $\| \text{up}_m^{(n)} \|_{C[-1,1]} = 2^n (2m)^{\frac{(n-1)n}{2}}$. Эта величина в дальнейшем будет обозначаться $B_n^{(m)}$.

Пусть $\Delta^2(f(x)) = f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)$ – вторая разность функции $f(x)$ в точке x с шагом h .

$$11. \Delta^2(\text{up}_m^{(l)}(x)) = 0 \text{ в точках } x \in \left[\frac{s}{m(2m)^l} \right] \text{ с шагом } h = \frac{1}{m(2m)^l},$$

$$(s \in \mathbb{Z}, |s| < m(2m)^l, s \not\equiv 0 \pmod{m}, l = 0, 1, 2, \dots);$$

12. Для производных функций $\text{up}_m(x)$ справедлива формула

$$\text{up}_m^{(l)}(x) = B_l^{(m)} \sum_{k=1}^{(2m)^l} \delta_k^{(m)} \text{up}_m \left((2m)^l x + (2m)^l - 2k + 1 \right). \quad (15)$$

При этом

$$\delta_k^{(m)} = (-1)^{\sum p_i}, \quad (16)$$

где p_i – i -й знак в $2m$ -ичном представлении числа $k/m - 1$, если m делит k и числа $[k/m]$, если m не делит k .

13. Функции $\text{up}_m(x)$ неаналитичны ни в одной точке носителя.

14. $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{up}_m(x) = B_1$ в равномерной метрике, где

$$B_1 = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases} \quad B_1 - B\text{-сплайн.}$$

Свойства 1–4 доказаны выше.

Свойство 5: $ur_m(0) = 1$. Из определяющего уравнения (1), условия финитности функции ur_m , а также из того, что при $x \in (-\infty, 0]$

$$\sum_{k=1}^m ur_m(2mx - 2k + 1) = 0,$$

следует, что

$$ur_m(0) = \int_{-\infty}^0 ur'_m(x) dx = 2 \int_{-\infty}^0 \sum_{k=1}^m ur_m(2mx + 2m - 2k + 1) dx, \quad (17)$$

После замены $2mx + 2m - 2k + 1 = z$ формула (17) примет вид

$$ur_m(0) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m ur_m(z) dz, \quad (18)$$

но $\int_{-\infty}^{\infty} ur_m(x) dx = 1$. Подставляя это значение в правую часть равенства (18), получим требуемое.

Свойство 6, т.е. четность функции $ur_m(x)$, следует из вида уравнения (1). Это можно также вывести из замечания к теореме 1 о свертках.

Свойство 7: $up_m(x)$ монотонно возрастает при $x \in [-1, 0]$ и убывает при $x \in [0, 1]$.

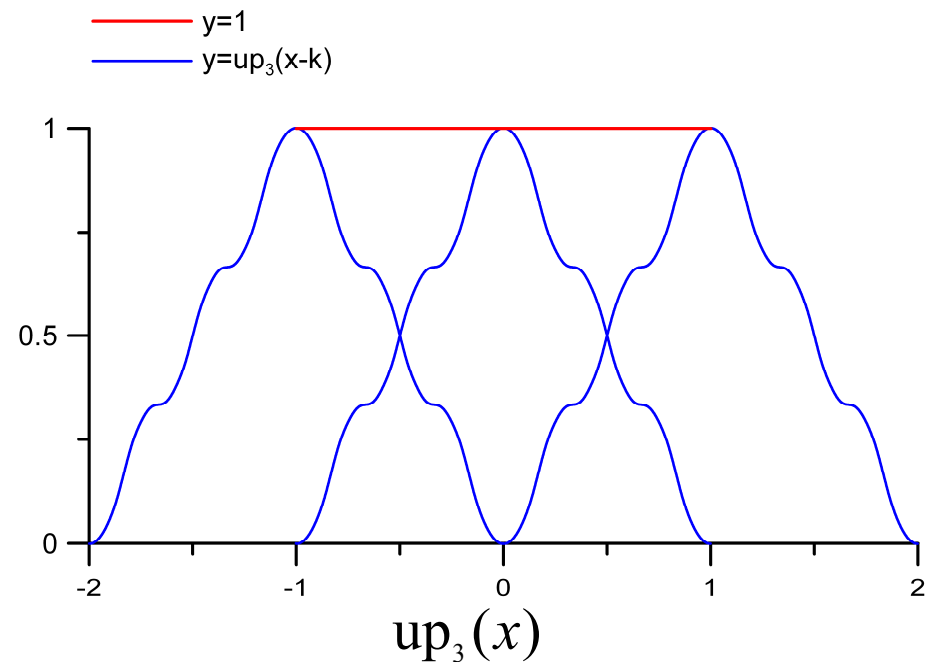
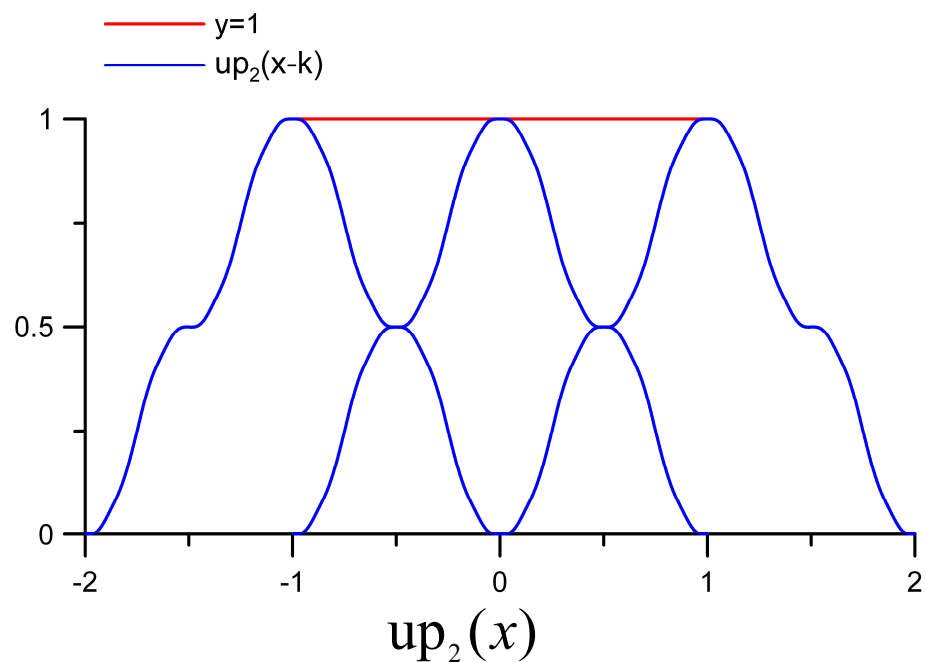
Так как $up_m(x)$ неотрицательна на отрезке $[-1, 1]$, то с учетом определяющего уравнения, $up'_m(x) \geq 0$ при $x \in [-1, 0]$ и $up'_m(x) \leq 0$ при $x \in [0, 1]$, откуда и следует свойство 7.

Свойство 8:
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} up_m(x - k) \equiv 1$$

Непосредственно из определяющего уравнения следует, что при $x \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$up'_m(x - 1) + up'_m(x) = 2 \sum_{k=1}^m up_m(2m(x - 1) + 2m - 2k + 1) - 2 \sum_{k=1}^m up_m(2mx - 2k + 1) \equiv 0.$$

Это означает, что при $x \in [0, 1]$ $up_m(x - 1) + up_m(x) \equiv c = Const$. Так как при $x = 0$ $up_m(-1) + up_m(0) = 1$, то $c = 1$. Точно также $up_m(x) + up_m(x + 1) \equiv 1$ при $x \in [-1, 0]$. Вообще, $up_m(x - k) + up_m(x - k + 1) \equiv 1$ при $x \in [k - 1, k]$. Свойство 8 доказано.



Разложение единицы сдвигами функций $up_m(x)$

Свойство 8.
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} up_m(x-k) \equiv 1$$

Свойство 9:
$$N_{l,m} = \left\{ \frac{2s}{(2m)^l} \right\}_{s=1}^{\infty}, \left(s \in \mathbb{Z}, |s| \leq \frac{(2m)^l}{2} \right), N_{0,m} = \{-1, 1\}$$

Для доказательства применяется индукция по l с учетом определяющего уравнения и того, что $\text{up}_m(x) > 0$ при $x \in (-1, 1)$, $\text{up}_m(-1) = \text{up}_m(1) = 0$.

Свойство 10:
$$\| \text{up}_m^{(n)} \|_{C[-1,1]} = 2^n (2m)^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

Непосредственно проверяется, что $B_n^{(m)}$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению

$$B_n^{(m)} = 2(2m)^{n-1} B_{n-1}^{(m)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

что и требуется.

Свойство 11: $\Delta^2(\text{up}_m^{(l)}(x)) = 0$ в точках $x \in \left[\frac{s}{m(2m)^l} \right]$ с шагом $h = \frac{1}{m(2m)^l}$,

Доказательство: заметим, что при $l = 0$ свойство 11 равносильно условию

$$\text{up}_m\left(\pm \frac{s}{m}\right) = 1 - \frac{s}{2m}, \quad (s = 0, 1, \dots, 2m) \quad (20)$$

Докажем равенство (20). Имеем

$$\begin{aligned} \text{up}_m\left(-\frac{s}{m}\right) &= \int_{-1}^{-\frac{s}{m}} \text{up}'_m(x) dx = \int_{-1}^{-\frac{s}{m}} 2 \sum_{k=1}^{m-s} \text{up}_m(2mx + 2m - 2k + 1) dx = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{m-s} \int_{-1}^{-\frac{s}{m}} \text{up}_m(2mx + 2m - 2k + 1) dx. \end{aligned}$$

Произведем замену $2mx + 2m - 2k + 1 = z$. Тогда $z = -2k + 1 \leq -1$ при $x = -1$ и $z = -2s + 2m - 2k + 1 = 2(m - (s + k)) + 1$ при $x = -s/m$

$$\text{up}_m \left(-\frac{s}{m} \right) = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m-s} \int_{-1}^1 \text{up}_m(z) dz = \frac{m-s}{m} = 1 - \frac{s}{m}.$$

Равенство (20) доказано. Теперь заметим, что согласно определяющему уравнению функция $\text{up}'_m(x)$ состоит из суммы $2m$ отличающихся друг от друга лишь носителями и знаками компонент (m положительных компонент при $x \in (-1, 0)$ и m отрицательных при $x \in (0, 1)$), каждая из которых подобна функции $\text{up}_m(x)$ и получается из нее сжатием в $2m$ раз вдоль оси x , растяжением вдоль оси y и сдвигом. Это означает, что равенство, аналогичное равенству (20), можно написать и для каждой такой компоненты, что и доказывает свойство 11 в случае $l = 1$. Вполне аналогично доказательство проводится и для всех $l > 1$.

Свойство 12.

$$\text{up}_m^{(l)}(x) = B_l^{(m)} \sum_{k=1}^{(2m)^l} \delta_k^{(m)} \text{up}_m \left((2m)^l x + (2m)^l - 2k + 1 \right)$$

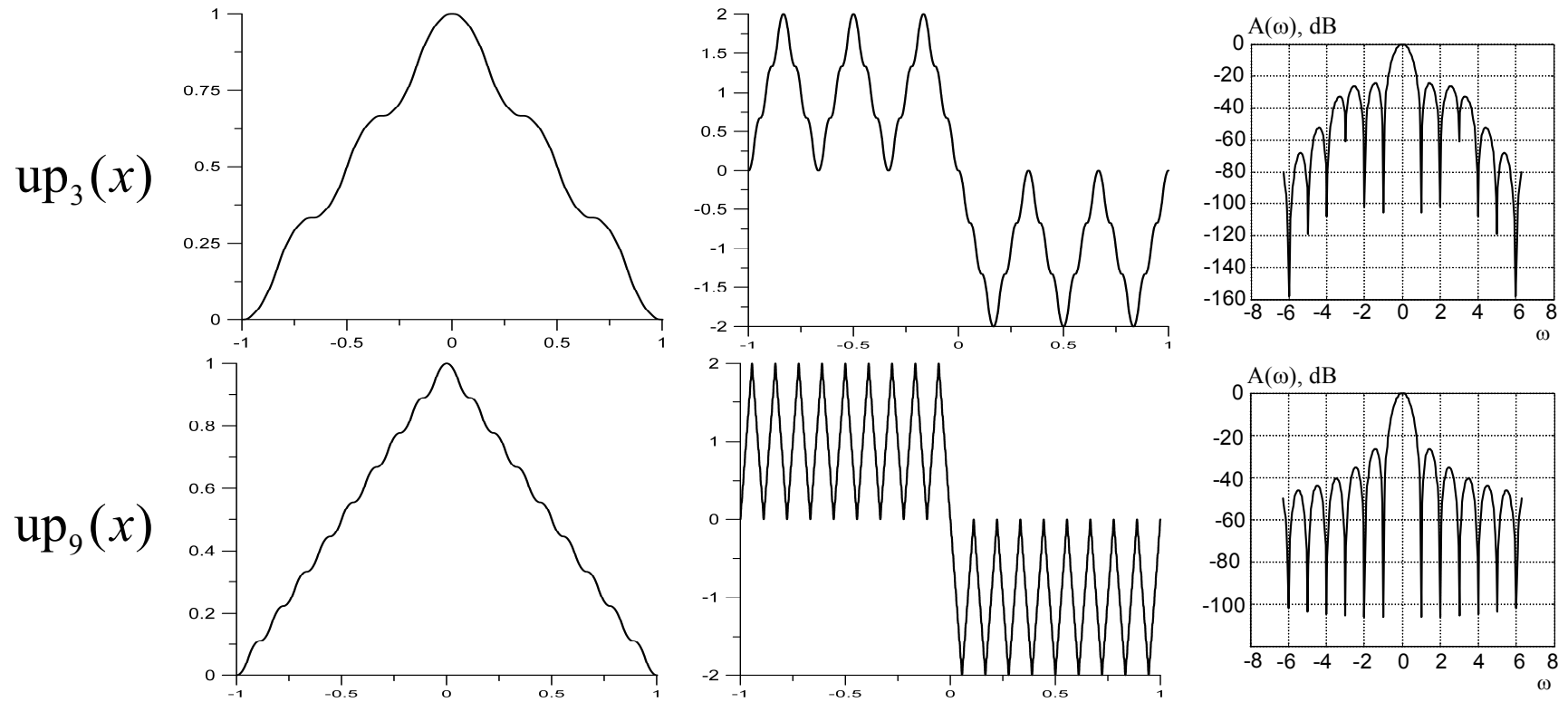
Для доказательства достаточно воспользоваться свойством 10 и применить метод полной индукции. При этом распределение знаков (формула (16)) также доказывается по индукции с учетом распределения знаков слагаемых в правой части определяющего уравнения.

Замечание. При каждом $m = 2, 3, \dots$ последовательности $\{\delta_k^{(m)}\}$ – обобщенные последовательности Морса-Туэ. Последовательности Морса-Туэ соответствует функция $ur_1(x) = ur(x)$.

Свойство 13: Функции $ur_m(x)$ неаналитичны ни в одной точке носителя.

Для доказательства положим $N_m = \bigcup_{l=0}^{\infty} N_{l,m}$ (см. свойство 9) и положим $E_m = [-1, 1] \setminus N_m$. Возьмем $x_0 \in E_m$. Из определения множества E_m и свойства 10 ясно, что последовательность $\{|ur_m^{(k)}(x_0)|\}_{k=0}^{\infty}$ растет при $k \rightarrow \infty$ существенно быстрее, чем соответствующие последовательности значений производных аналитических функций. Кроме того, очевидно, что E_m – всюду плотное множество на отрезке $[-1, 1]$. Приведенные соображения по существу означают, что ряд Тейлора для функции $ur_m(x)$ в точках $x \in N_m$ – многочлен, а в точках $x \in E_m$ имеет нулевой радиус сходимости. Свойство 13 доказано.

Свойство 14: $\lim_{m \rightarrow \infty} ur_m(x) = B_1$ непосредственно следует из равенства (20) и непрерывности функций $ur_m(x)$. Все свойства 1–14 доказаны.



Атомарные функции $up_m(x)$, их производные и спектральные характеристики.

Моменты и значения функций $up_m(x)$

Пусть $\mu_n^{(m)}$ – момент порядка n функции $up_m(x)$, т.е. $\mu_n^{(m)} = \int_{-1}^1 x^n up_m(x) dx$.

Так как $up_m(x)$ – четная функция, то ее нечетные моменты $\mu_{2n-1}^{(m)} = 0$.

Теорема 2. Моменты $\mu_{2n}^{(m)}$ – рациональные числа, находимые по рекуррентной формуле

$$\mu_{2n}^{(m)} = \frac{(2n)!}{m^2 ((2m)^{2n} - 1)} \sum_{k=1}^n \frac{\sum_{l=1}^m (2l-1)^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!} \mu_{2n-2k}^{(m)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (21)$$

Доказательство. Заметим, что

$$F_m^{(n)}(0) = i^n \int_{-1}^1 x^n up_m(x) dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Это непосредственно следует из простейших свойств преобразования Фурье. Поэтому

$$F_m^{(2n)}(0) = (-1)^n \int_{-1}^1 x^{2n} up_m(x) dx = (-1)^n \mu_{2n}^{(m)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Вернемся теперь к равенству (6)

$$F(t) = \frac{2 \cdot \sin^2(t/2)}{mt \sin(t/2m)} F\left(\frac{t}{2m}\right).$$

Функция $F_m(x)$ – целая и, тем самым, аналитическая. Разложим левую и правую части этого равенства в ряд Тейлора

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{F_m^{(s)}(0)}{s!} t^s = \frac{2}{mt} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{F_m^{(s)}(0)}{s!} \left(\frac{t}{2m}\right)^s \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^s \frac{\left(\frac{2m-2k+1}{2m}\right)^{2s+1}}{(2s+1)!}. \quad (23)$$

Представим это разложение в виде

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{F_m^{(s)}(0)}{s!} t^s = \frac{2}{mt} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{t^{2s+1}}{(2m)^{s+1} (2s+1)!} \sum_{k=1}^m (2m-2k+1)^{2s+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{F_m^{(s)}(0)}{(2m)^s s!} t^s. \quad (24)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t и полагая затем $l = n - k + 1$, получим, с учетом (22) равенство (21). Теорема доказана.

Положим при $n = 0, 1, 2, \dots$

$$v_{2n-1}^{(m)} = \int_0^1 x^n \text{up}_m(x) dx. \quad (25)$$

Теорема 3. Справедлива формула

$$v_{2n-1}^{(m)} = \frac{1}{n(2m)^{2n+1}} \sum_{l=0}^n \binom{2n}{2l} \sum_{k=1}^m (2k-1)^{2l} \mu_{2n-2l}^{(m)}. \quad (26)$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$v_{2n-1}^{(m)} = \int_0^1 x^{2n-1} \text{up}_m(x) dx = \frac{1}{2n} \int_0^1 \text{up}_m(x) dx^{2n} = \text{up}_m(x) \frac{x^{2n}}{2n} \Big|_0^1 - \frac{1}{2n} \int_0^1 x^{2n} \text{up}'_m(x) dx.$$

Внеинтегральный член равен нулю на обоих пределах, поэтому

$$v_{2n-1}^{(m)} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \int_0^1 x^{2n} \text{up}_m(2mx + 2m - 2k + 1) dx + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \int_0^1 x^{2n} \text{up}_m(2mx - 2k + 1) dx. \quad (27)$$

Так как носитель функции $\text{up}_m(x)$ – отрезок $[-1, 1]$, то в первой сумме равенства (27) каждое слагаемое равно нулю. Поэтому, после замены $2mx - 2k + 1 = t$, получим

$$\begin{aligned}
v_{2n-1}^{(m)} &= \frac{1}{n(2m)^{2n+1}} \sum_{k=1}^m \int_{-1}^1 (t+2k-1)^{2n} \operatorname{up}_m(t) dt = \\
&= \frac{1}{n(2m)^{2n+1}} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \binom{2n}{2l} (2k-1)^{2l} \mu_{2n-2l}^{(m)} = \frac{1}{n(2m)^{2n+1}} \sum_{l=0}^n \binom{2n}{2l} \mu_{2n-2l}^{(m)} \sum_{k=1}^m (2k-1)^{2l}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, что $v_{2n}^{(m)} = \frac{1}{2} \mu_{2n}^{(m)}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Положим

$x_{m,n,s} = -1 + \frac{s}{m(2m)^n}$, ($s = 0, 1, \dots, (2m)^{n+1}$). Ясно, что точки $x_{m,n,s}$ образуют всюду

плотное множество на отрезке $[-1, 1]$. Примечательно, что значения функций $\operatorname{up}_m(x)$ в точках этого множества рациональны и вычисляются по явным формулам.

Теорема 4. Справедливы формулы

$$\operatorname{up}_m(x_{m,n,s}) = \frac{2^{n+1}}{n!(2m)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}} \sum_{j=1}^s \delta_j^{(m)} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (2s-2j+1)^{n-2k} \mu_{2k}^{(m)}, \quad (28)$$

где $[a]$ – целая часть числа a . При $s = 1$ формулы упрощаются

$$\text{up}_m(x_{m,n,1}) = \frac{1}{m!} \int_{-1}^{x_{m,n,1}} \text{up}_m^{(n+1)}. \quad (29)$$

Доказательство. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и учитывая (15), получим

$$\text{up}_m(x_{m,n,s}) = \frac{1}{m!} \int_{-1}^{x_{m,n,s}} \text{up}_m^{(n+1)}(t)(x_{m,n,s} - t)^n dt = \frac{2^{n+1}(2m)^{n(n+1)/2}}{n!} \times \quad (30)$$

$$\times \sum_{j=1}^s \delta_j^{(m)} \int_{-1}^{x_{m,n,s}} (x_{m,n,s} - t)^n \text{up}_m \left((2m)^{n+1} t + (2m)^{n+1} - 2j + 1 \right) dt.$$

После замены $z = (2m)^{n+1} t + (2m)^{n+1} - 2j + 1$ получим

$$\begin{aligned} \text{up}_m(x_{m,n,s}) &= \frac{2^{n+1}}{n!(2m)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}} \sum_{j=1}^s \delta_j^{(m)} \int_{-1}^1 \text{up}_m(z)(2s - 2j - z + 1)^n dz = \\ &= \frac{2^{n+1}}{n!(2m)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}} \sum_{j=1}^s \delta_j^{(m)} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (2s - 2j + 1)^{n-2k} \mu_{2k}^{(m)}, \end{aligned}$$

что и требуется. Формула (29) получается после аналогичных вычислений. Теорема доказана. Аналогично получаются формулы для значений производных функций $\text{up}_m(x)$.

Вычисление АФ $up_2(x)$ как неподвижной точки оператора

$$A(y) = 2 \int_{-1}^x \sum_{k=1}^m (y(2m\eta + 2m - 2k + 1) - y(2m\eta - 2k + 1)) d\eta$$

$$A(y) = 2 \int_{-1}^x (y(4\eta + 3) + y(4\eta + 1) - y(4\eta - 1) - y(4\eta - 3)) d\eta$$

Носитель искомой функции $[-1, 1]$

Носители слагаемых правой части уравнения
 $[-1, -0.5], [-0.5, 0], [0, 0.5], [0.5, 1]$

1																
1	1	-1	-1													
1	2	1	0													
1	2	1	0	1	2	1	0	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	0	
1	3	4	4	5	7	8	8	7	5	4	4	3	1	0	0	

Новые весовые функции (окна) на основе семейства атомарных функций $u_{r_m}(x)$

При анализе сигналов решаются две задачи: обнаружения и оценивания. Обнаружение подразумевает поиск ответа на вопрос: наблюдается ли данный сигнал с известными параметрами в данное время? Оценивание подразумевает получение значений параметров некоторого сигнала. В тоже время исходный сигнал редко содержит только интересующие нас составляющие, и так как на него накладываются помехи, то он часто бывает зашумлён. Для упрощения указанных задач сигналы обычно разлагают по их базисным составляющим. С этой целью используется разложение по базису, состоящему из простых периодических функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$ соответствующее классическому преобразованию Фурье. На практике при использовании современной вычислительной техники сигналы представляют собой последовательность эквиди-

стантных отсчётов взятых на конечном интервале времени. Выбор конечного интервала и ортогонального тригонометрического базиса приводит к неприятному эффекту, получившему название «просачивания спектральных составляющих». Оно заключается в том, что из всего континуума частот только те, которые имеют частоту, совпадающую с частотой базисного вектора, проецируются точно и только на один вектор, а все остальные проецируются на все базисные вектора. Как известно, при использовании преобразования Фурье предполагается, что рассматриваемая функция является периодической с периодом, равным периоду наблюдения. В тоже время, если период сигнала не кратен интервалу наблюдения, то он будет содержать разрывы на его границах (рис. 2).

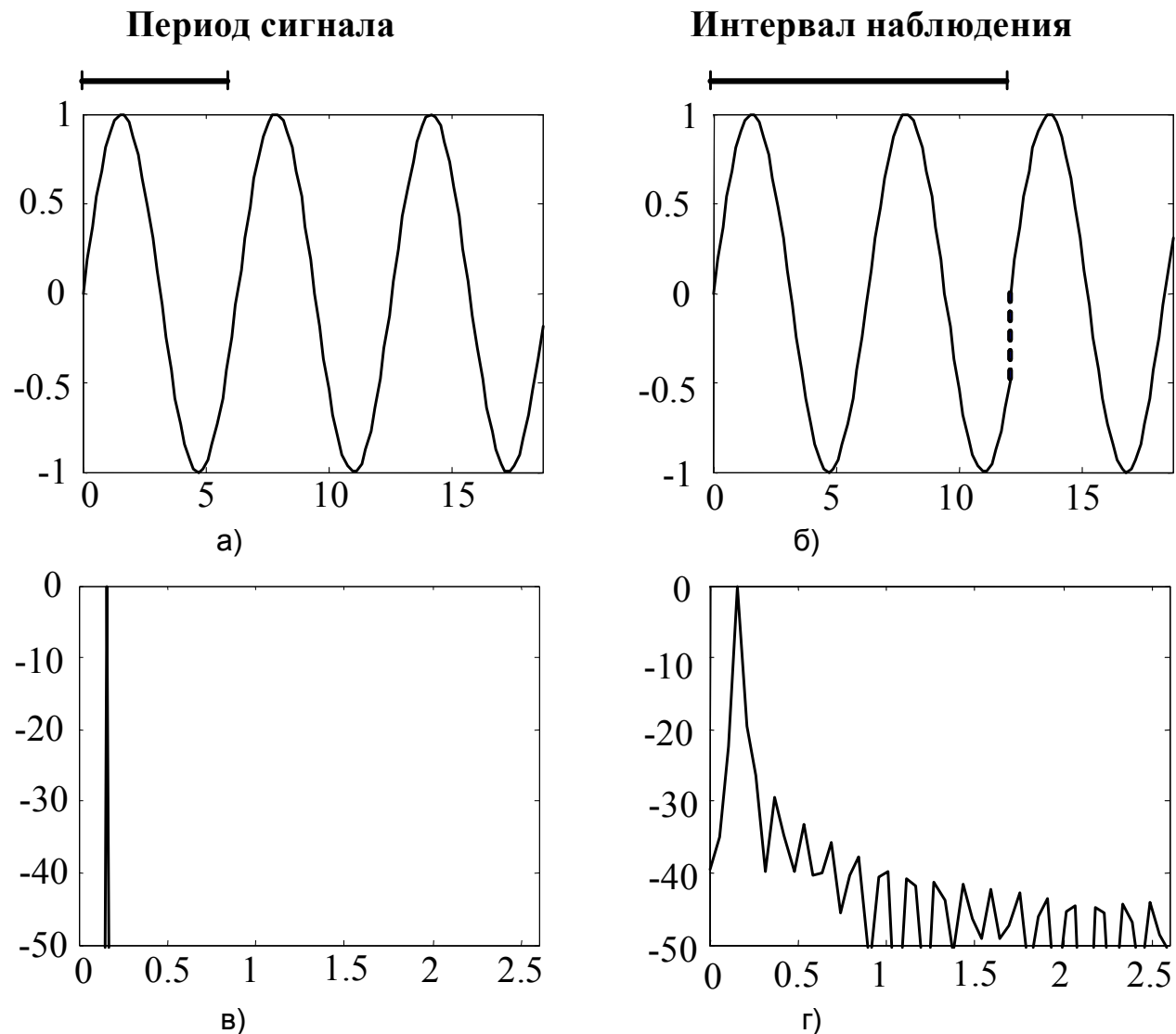


Рис. 2. Эффект «просачивания спектральных составляющих»
 а, б – неперодичность продолжения синусоиды;
 в, г –логарифмы от амплитуды преобразования Фурье сигналов (а) и (б)

Для решения этой проблемы используют весовые функции (окна). Они используются для уменьшения размывания спектральных компонент, обусловленных конечностью интервала наблюдения. Основным эффектом окон проявляется в том, что с их помощью согласуются значения функции и её производных на краях интервала.

Для оценивания весовых функций (окон) применяются следующие физические характеристики:

1. Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП);
2. Корреляция перекрывающихся участков (50% перекрытия);
3. Паразитная амплитудная модуляция (АМ);
4. Максимальные потери преобразования;
5. Максимальный уровень боковых лепестков;
6. Ширина полосы по уровню 6 дБ;
7. Когерентное усиление;

Рассмотрим эти физические параметры более подробно.

Эквивалентная шумовая полоса — это ширина полосы пропускания прямоугольного фильтра с тем же максимальным усилением по мощности, который накапливает ту же мощность шума, что и данное окно. ЭШП окна, нормированная на величину N_0/T — мощность шума на бин (единичный временной интервал), записывается в виде

$$k_1 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(nT)}{\left[\sum_{n=0}^{N-1} w(nT) \right]^2}.$$

Корреляция перекрывающихся участков используется в тех, случаях когда БПФ требуется для обработки длинной последовательности. Эту последовательность делят на несколько последовательностей по N отсчётов каждая. Если участки не перекрываются, то данные, находящиеся на их границах не будут учтены, так как при использовании окна они стремятся к нулю. Поэтому, чтобы избежать возможных потерь данных, используются перекрывающиеся интервалы, со степенью перекрытия 50% (рис. 3).

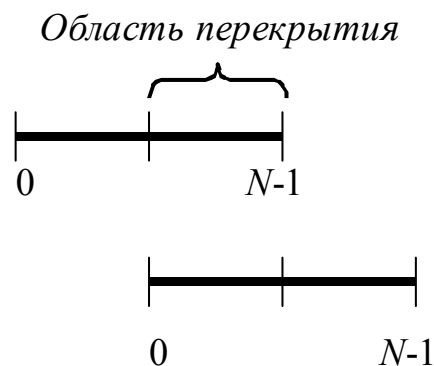


Рис. 3.
Интервал перекрытия сигналов

Для оценки влияния, которое оказывает корреляция случайных компонент сигнала в преобразовании двух соседних интервалов, и используется данный параметр. Корреляция перекрывающихся участков определяются следующим соотношением:

$$k_2 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w(nT) w\left(\left[n + \frac{N}{2}\right]T\right)}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(nT)} 100\%.$$

Паразитная амплитудная модуляция определяет потери, связанные с реализацией самого ДПФ, если частота сигнала находится между двумя соседними бинами ДПФ. Потери из-за паразитной АМ равны максимальным потерям при самой неблагоприятной для ДПФ частоте сигнала. Паразитная АМ записывается в виде

$$k_3 = \frac{\left| \sum_n w(nT) \cdot \exp\left\{-i \frac{\pi}{N} n\right\} \right|}{\sum_n w(nT)}.$$

Максимальные потери преобразования определяются как сумма потерь, обусловленных из-за паразитной АМ, а также потерь преобразования, обусловленных формой окна, по формуле

$$k_4 = 10 \lg(k_1) + k_3.$$

Максимальный уровень боковых лепестков характеризует степень ослабления соседних частот в сравнении с основной. Низкий уровень боковых лепестков также позволяет уменьшить степень просачивания спектральных составляющих.

$$k_5 = 10 \lg \left(\max_k \left| \frac{W(\theta_k)}{W(0)} \right|^2 \right),$$

где $\{\theta_k\}$ — точки локальных максимумов (исключая θ_0).

Ширина полосы по уровню 6 дБ позволяет определить то минимальное расстояние между двумя соседними частотами, которое будет различаться на диаграмме в виде двух соседних пиков:

$$k_6 = 2\theta,$$

где θ — наибольшая частота, такая, что $10 \lg \left| \frac{W(0)}{W(\theta)} \right|^2 = 6$.

Когерентное усиление является коэффициентом усиления для постоянного сигнала, частота которого совпадает с базисной:

$$k_7 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(nT).$$

Таблица 1. Основные физические параметры окон, построенных на функциях $ur_m(x)$

Окно $ur_m(x)$	Эквивалентная шумовая полоса, бин	Корреляция перекрывающихся участков (50% перекрытия), %	Паразитная АМ, дБ	Макс. потери преобразования, дБ	Максимальный уровень боковых лепестков, дБ	Скорость спада боковых лепестков, дБ/октава	Полоса по уровню 6.0 дБ, бин	Когерентное усиление
m	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
2	1.3872	22.0902	1.7041	3.1254	-20.4178	$-\infty$	1.8191	0.5000
3	1.3563	23.7316	1.7730	3.0964	-24.5717	$-\infty$	1.8191	0.5000
4	1.3461	24.2911	1.7958	3.0864	-25.5306	$-\infty$	1.8191	0.5000
5	1.3414	24.5477	1.8061	3.0818	-25.9267	$-\infty$	1.8191	0.5000
6	1.3389	24.6864	1.8117	3.0793	-26.1307	$-\infty$	1.8191	0.5000
7	1.3374	24.7698	1.8150	3.0778	-26.2501	$-\infty$	1.8191	0.5000
8	1.3365	24.8239	1.8172	3.0768	-26.3262	$-\infty$	1.8191	0.5000
9	1.3358	24.8609	1.8187	3.0761	-26.3777	$-\infty$	1.8191	0.5000
10	1.3353	24.8874	1.8197	3.0756	-26.4143	$-\infty$	1.8191	0.5000
20	1.3338	24.9719	1.8231	3.0741	-26.5295	$-\infty$	1.8191	0.5000

Видно, что при увеличении порядка m , окно Кравченко, построенное на функции $w_p_m(x)$ по своим характеристикам стремится к треугольному окну, однако скорость спада боковых лепестков у окна $w_p_m(x)$ существенно выше.

Рассмотрим на примере функции $w_{p_{10}}(x)$ эффективность окна для обнаружение слабого сигнала в присутствии интенсивного близкорасположенного сильного сигнала. В качестве тестового возьмем сигнал, представляющий собой сумму двух синусоид: $x_1 = \sin(10 \cdot 2\pi \cdot x)$ и $x_2 = 0,01 \cdot \sin(16 \cdot 2\pi \cdot x)$.

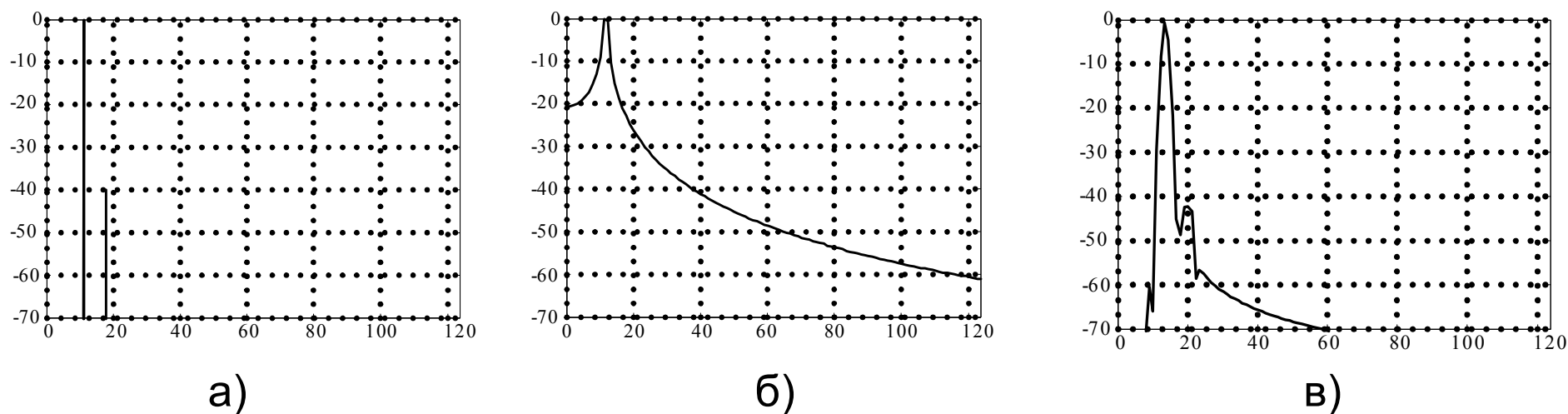


Рис. 4 а),б) - вид сигналов до обработки:
а) – сильный сигнал с частотой 10 бин; б) – 10,5 бин;
в) -вид сигнала после обработки весовой функцией $w_{p_{10}}(t)$

Двумерные весовые функции на основе семейства атомарных функций $ur_m(x)$

Перспективным направлением использования АФ является цифровая обработка многомерных сигналов. АФ функции применяются в таких задачах обработки двумерных сигналов как обработка речи, цифровая радиолокация, синтез КИХ- и БИХ-фильтров.

Так, двумерные КИХ-фильтры как правило синтезируются на основе двумерных оконных функций, определенных на прямоугольной, круговой или иной опорной области. В простейшем случае прямоугольной опорной области двумерное весовое окно формируется с помощью прямого произведения одномерных окон,

$$w[n_1, n_2] = w_1[n_1] \cdot w_2[n_2]. \quad (31)$$

Оконные функции удовлетворяют условиям нормировки: $w(x)=0$ для $|x|>1$, $w(0)=1$, $w(-x)=w(x)$. С помощью выражения (31) можно построить двумерные окна с прямоугольной опорной областью.

Для сравнения характеристик двумерных окон в плоскости $\omega_2=0$ используем ту же систему физических параметров.

Как и в одномерном случае, в силу бесконечной дифференцируемости атомарных весовых функций, асимптотическая скорость спада боковых лепестков представленных окон равна бесконечности.

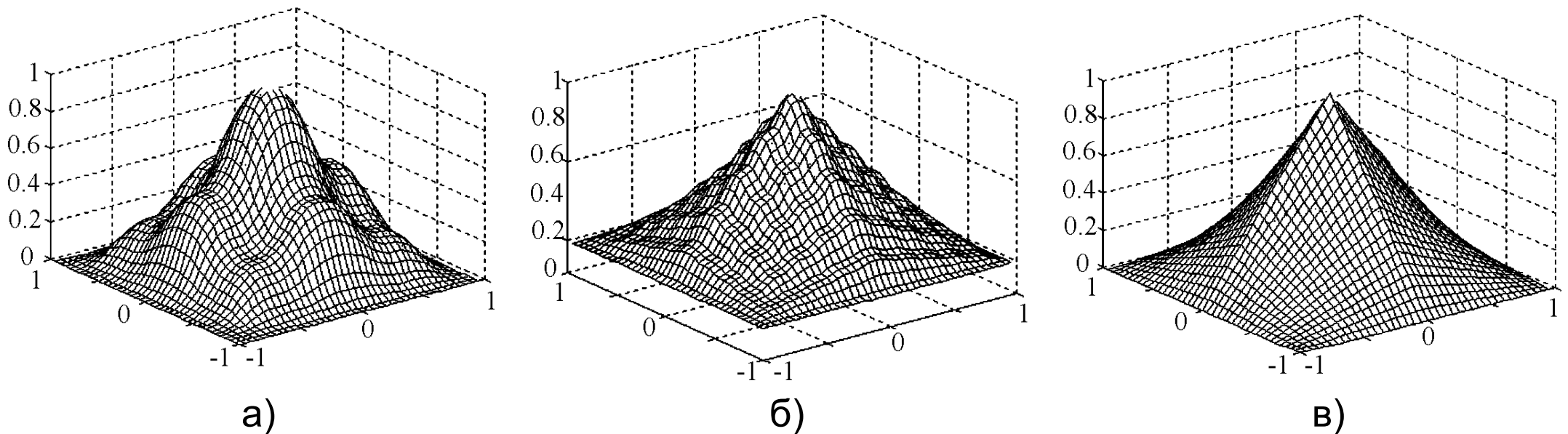


Рис. 5. Двумерные окна с квадратной опорной областью,
 $a - m = 2$; $б - m = 5$; $в - m = 20$

В случае круговой опорной области весовое окно получается путем вращения одномерного весового окна вокруг оси симметрии с помощью выражения

$$w[n_1, n_2] = w[\sqrt{n_1^2 + n_2^2}], \quad (32)$$

где $w(\cdot)$ – функция одномерного непрерывного окна. С помощью (32) можно получить двумерные дискретные атомарные окна, обладающие круговой симметрией. Такая симметрия желательна, когда любое направление в плоскости изображения является равноценным, например, при исследовании радиолокационных картин.

